

筆記試験問題

令和9年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（1次）

数 学 専 攻

令和8年8月10日（月）

試験時間 10：00～12：30

受験上の注意 A

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけない。
2. 問題紙は、表紙も含めて3ページある。
3. 解答用紙は4枚、下書き用紙は4枚ある。
4. 受験番号および座席番号を、監督者の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 各問題の解答は、それぞれ指定された解答用紙に記入すること。必要があれば、解答用紙の裏面を使用してもよい。
6. 問題紙の余白は、下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は4枚とも提出すること。
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない。

受験上の注意 B

- 答案には、論理的推論や式変形など、考察の過程を詳しく記述すること。

問題 1

A を実 3×3 行列とする. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V が $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V\} \subseteq V$ を満たすとき, V を A 不変な部分空間という.

- (1) A は実固有値を持つことを示せ.
- (2) A 不変な 1 次元部分空間が存在することを示せ.

以下では λ を A の実固有値, E を 3×3 単位行列とする.

- (3) $\text{rank}(\lambda E - A) = 1$ のとき, A 不変な 2 次元部分空間が存在することを示せ.
- (4) $\text{rank}(\lambda E - A) = 2$ のとき, A 不変な 2 次元部分空間が存在することを示せ.

問題 2

正の整数 n に対して, 区間 $[0, 1]$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$$

で定義する.

- (1) 各 $x \in [0, 1]$ に対して, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

を求めよ.

- (2) 実数 $0 < a < 1$ に対して, 関数列 $\{f_n\}$ は, 区間 $[a, 1]$ 上で一様収束することを示せ.
- (3) 実数 $0 \leq a < 1$ に対して, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 f_n(x) dx$$

を求めよ. また, 関数列 $\{f_n\}$ は区間 $[0, 1]$ 上で一様収束するか理由とともに答えよ.

問題 3

- (1) X を位相空間とし, A を X の空でない連結部分集合とする. 任意の $p \in \overline{A}$ に対して, X の部分位相空間 $B = A \cup \{p\}$ が連結であることを示せ. ここで, $\overline{A}$ は A の X における閉包である.

- (2) 区間 $[0, \infty)$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x > 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は連続ではないことを示せ.

- (3) (2) の関数 $f(x)$ のグラフ

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

は連結であることを示せ. ただし, Γ_f は $\mathbb{R}^2$ における相対位相によって位相空間とみなしている.

問題 4

X, Y を空でない位相空間とする. 部分集合には, 相対位相を入れる.

- (1) X の閉集合 A, B で, $A \cup B = X$ を満たしているものを考える. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であることと, f の制限 $f|_A: A \rightarrow Y$ 及び $f|_B: B \rightarrow Y$ が連続であることは同値であることを示せ.
- (2) 直積空間 $X \times Y$ を考える. $X \times Y$ がハウスドルフであることと, X と Y がいずれもハウスドルフであることは同値であることを示せ.
- (3) $x_1, x_2 \in X$ に対して, 連続写像 $f: [0, 1] \rightarrow X$ で, $f(0) = x_1, f(1) = x_2$ を満たすものが存在するとき, $x_1 \sim x_2$ と定める. このとき, $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ.