筆 記 試 験 問 題

令和７年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数 学 専 攻

令和6年8月8日（木）

試験時間　１０：００～１２：３０

受 験 上 の 注 意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない．
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある．
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある．
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること．
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい．
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること．
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない．

受 験 上 の 注 意 B

- 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること．

問題 1

以下の問いに答えよ.

(1) U を 3 次元実ベクトル空間とし, その基底を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とする. 次のベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が U の基底になるような実数 a の条件を求めよ.

$$\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + (a-1)\boldsymbol{e}_2 + (a+2)\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + (a+1)\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + (a-1)\boldsymbol{e}_2 - a\boldsymbol{e}_3.$$

(2) 線形変換 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が, ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

について, $T(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を満たすとする. このような T は一意であることを示し, T の核と像の次元を求めよ.

(3) A, B を $n \times m$ 行列とするとき, $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ が成り立つことを示せ.

問題 2

$\alpha \in \mathbb{R}$ を定数とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となるための α についての必要十分条件を求めよ.

(2) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能となるための α についての必要十分条件を求めよ.

(3) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級となるための α についての必要十分条件を求めよ.

問題 3

集合 X および部分集合 A に対し, $x, y \in X$ の関係 $x \sim y$ を, $x = y$ または $x, y \in A$ が成り立つことと定める.

(1) $x \sim y$ は同値関係であることを示せ.

X を距離空間, $A \subsetneqq X$ を稠密な部分集合とし, (1) で定めた同値関係による商位相空間 $Y = X/\sim$ を考える. $\pi : X \to Y$ を標準射影とする.

(2) 1 点集合 $\{\pi(x)\}$ が Y の閉集合になるための必要十分条件は $x \notin A$ であることを示せ.

(3) $x \in A$ ならば, 点 $\pi(x)$ を含む閉集合は Y しかないことを示せ.

(4) Y は連結であることを示せ.

問題 4

以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とし, $\mathbb{R}^2$ 上で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ を満たすとする.

$$g(u, v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

とおくとき, $\mathbb{R}^2$ 上で $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $h(x, y)$ を

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \log(x^2 + y^2) & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

とおく. $h(x, y)$ が $(0, 0)$ で連続であることを示し, 閉領域

$$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 9\}$$

での重積分 $I = \displaystyle\iint_D h(x, y)\, dx\, dy$ の値を求めよ.