筆 記 試 験 問 題

令和６年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数 学 専 攻

試験時間　１０：００〜１２：３０　（１５０分）

受 験 上 の 注 意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない．
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある．
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある．
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること．
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい．
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること．
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない．

受 験 上 の 注 意 B

- 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること．

問題 1

V を内積 $(\cdot, \cdot)$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間, 線形写像 $T : V \to V$ は, ある実数 α が存在して $(x, Ty) = \alpha(Tx, y)$ $(x, y \in V)$ を満たすものとする. $\mathrm{Im}\, T$ を T の像, $\mathrm{Ker}\, T$ を T の核とする.

(1) $\mathrm{Im}\, T \cap \mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ を示せ.

(2) $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^2$ を示せ.

(3) $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Im}\, T^2$ を示せ.

問題 2

$\{a_i\}$ を有界な実数列とする.

(1) 実数 x が $|x| < 1$ を満たすとき $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ は絶対収束することを示せ.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正整数 N が存在して, $n > N$ かつ $|x| \leq \frac{1}{2}$ ならば $\left|\displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i\right| \leq \varepsilon$ であることを示せ.

(3) 次の $(*)$ が成り立つとする.

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正整数 N が存在して, $n > N$ かつ $|x| < 1$ ならば $\left|\displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i\right| \leq \varepsilon$ である.

このとき, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ は収束することを示せ.

問題 3

次の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 $S_0 = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ および $S_1 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ はコンパクトかどうか理由とともに答えよ.

(2) コンパクト空間 X から位相空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ に対して, $f(X)$ がコンパクトであることを示せ.

(3) 位相空間 X の 2 つの連結部分集合 X_1, X_2 が $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ を満たすとする. このとき $X_1 \cup X_2$ が連結であることを示せ.

問題 4

A を 3×2 の実数行列, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|^2$ ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$) とする. ただし, $|\cdot|$ と $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ はそれぞれユークリッドノルムと転置を表す.

(1) $f(\boldsymbol{x})$ の勾配 $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}$ を A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき, $f(\boldsymbol{x})$ が極小値をとる $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ.