筆 記 試 験 問 題

令和５年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数 学 専 攻

試験時間　１０：００〜１２：３０　（１５０分）

受 験 上 の 注 意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない.
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある.
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある.
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること.
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい.
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい.
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること.
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない.

受 験 上 の 注 意 B

- 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること.

問題 1

m と n を自然数とする．

(1) U と V を m 次元と n 次元の実ベクトル空間とし，W を V から U への線形写像全体の集合とする．このとき実ベクトル空間 W の次元を理由とともに述べよ．

(2) $\mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ を n 次実正方行列全体の集合とし，$A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ は n 個の相異なる実固有値を持つとする．このとき

$$W = \{X \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$$

で定まる実ベクトル空間 W の次元を理由とともに述べよ．

問題 2

(X, d) をコンパクト距離空間とする．但し，X は無限集合とする．

(1) (a) X は稠密な可算部分集合を含むことを示せ．

(b) X には可算個からなる開集合の基が存在する (つまり、X が第 2 可算公理を満たす) ことを示せ．

(2) X 上の実数値連続関数 f は一様連続であることを示せ．

問題 3

以下の問いに答えよ．

(1) (a) 正項級数 $\sum_n a_n$，$\sum_n b_n$ において，十分大きなすべての n で

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

が成り立つとき，$\sum_n a_n$ が収束すれば $\sum_n b_n$ も収束することを示せ．

(b) 定数 $0 < \alpha < 1$ と $\beta > 0$ があって a_n が次式をみたすとき，正項級数 $\sum_n a_n$ の収束・発散を判定せよ．

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\beta}}\right) \qquad (n \to \infty).$$

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

が収束することおよび絶対収束しないことを示せ．

問題 4

A は 3 次実対称行列，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$，$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ とする．ここで $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積である．

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ をみたす $\mathbb{R}^3$ の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ に沿って $\dfrac{df(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \geq 0$ であることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A の固有値を求めよ．

(3) (2) で与えられた A に対して，$|\boldsymbol{x}| = 1$ のもとでの $f(\boldsymbol{x})$ の最大値とそのときの $\boldsymbol{x}$ を求めよ．