筆記試験問題

令和４年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数学専攻

試験時間　１０：００～１２：３０　（１５０分）

受験上の注意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない．
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある．
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある．
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること．
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい．
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること．
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない．

受験上の注意 B

- 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること．

問題 1

V を実ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$ を満たす V の線形変換とする．ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は T の核，$\mathrm{Im}(T)$ は T の像を表す．$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とし，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r \in V$ を $\boldsymbol{a}_k = T(\boldsymbol{b}_k)$ $(1 \le k \le r)$ を満たすベクトルとする．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ は V の基底であることを示せ．

(3) V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ に関する T の表現行列を求めよ．

問題 2

(1) 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ が $(x,y) = (0,0)$ で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin^2 y}{x^2 + 2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2) $a > 0$ とする．次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{x^2}{1+e^{-nx}} dx$$

(3) $\log \dfrac{1-x^3}{1-x}$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を求めよ．

問題 3

X を無限集合とする．$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid U^c$は X の有限部分集合$\} \cup \{\varnothing\}$ は X の位相を定める．ただし，$\varnothing$ は空集合，U^c は U の補集合を表す．

(1) X は連結であることを示せ．

(2) X はコンパクトであることを示せ．

(3) X はハウスドルフ空間でないことを示せ．

(4) Y を X の無限部分集合とする．Y は X の稠密な部分集合であることを示せ．

問題 4

$M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素正方行列全体の集合とし，$A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

と定義することで，$M_n(\mathbb{C})$ にノルムを導入する．このとき，$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ が成り立つことが知られている．

(1) $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$\exp(X) = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{k!}X^k + \cdots$$

はノルムによって定まる距離に関して収束することを示せ．ただし，E を n 次単位行列とする．

(2) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ が $\|A\|, \|B\| \leq a$ を満たすなら，任意の整数 $k \geq 1$ に対し，

$$\|A^k - B^k\| \leq ka^{k-1}\|A - B\|$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\exp\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ はノルムによって定まる距離に関して連続であることを示せ．

(4) $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$ を示せ．ただし，$A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ とする．