筆 記 試 験 問 題

令和３年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数 学 専 攻

試験時間　１０：００～１２：３０　（１５０分）

受 験 上 の 注 意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない．
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある．
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある．
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること．
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい．
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること．
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない．

受 験 上 の 注 意 B

1. 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること．
2. 問題文中の $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す．

問題 1

(1) 次の関数 $f(x)$ は $x=0$ において微分可能であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

(2) 正の整数 n に対して

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+nx} \quad (x \geqq 0)$$

とおく. $a>0$ に対して，関数列 $\{f_n\}$ は区間 $[a,\,\infty)$ 上で一様収束することを示せ. また，$\{f_n\}$ は $[0,\,\infty)$ 上で一様収束するか否か，理由を付けて答えよ.

(3) $a,\,b,\,c>0$ とする. 次の広義積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{((ax)^2+(by)^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

問題 2

(X,d) を距離空間とする. 直積集合 $X\times X$ の 2 つの要素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ に対して

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{d(x_1,y_1)^2+d(x_2,y_2)^2}$$

とおく.

(1) ρ は $X\times X$ 上の距離関数となることを示せ.

(2) 関数 $d: X\times X \to \mathbb{R}$ は距離 ρ に関して一様連続であることを示せ.

(3) X の空でない部分集合 A に対し $r(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$ とおく. A がコンパクトならば，ある $a,b\in A$ が存在して $r(A)=d(a,b)$ となることを示せ.

問題 3

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(2) m を整数とするとき，複素線積分 $\displaystyle\int_C (z-1)^m dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面において $z=1$ を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに 1 周する積分路である．

(3) A と C はそれぞれ問 (1), (2) の通りとする．このとき，複素線積分

$$\int_C \frac{1}{\det(zI - A^2)}\, dz$$

の値を求めよ．ただし，I は 3 次単位行列である．

問題 4

V を n 次元実ベクトル空間とし，次の 2 条件 (i), (ii) を満たす V の線形変換 S, T を考える．

(i) S は対角化可能　　　(ii) $ST - TS = T$

ただし，S が対角化可能とは，S の固有ベクトルからなる V の基底が存在するときをいう．

(1) $v \in V$ とし，$w = Tv$ とおく．実数 α に対して，$Sv = \alpha v$ のとき $Sw = (\alpha+1)w$ を示せ．

(2) β を S の最小の固有値，m を β の固有空間の次元とする．$\operatorname{rank} T \leqq n - m$ を示せ．

(3) k を S の相異なる固有値の個数とする．T^k は V の零変換であることを示せ．