核心解説：微分積分学I

vol.2 2変数関数の極値の判定法

作成者：乙戸勇大，吉田啓佑，吉田大河（監修：数学教室）

5　はじめに

「vol.1 平均値の定理とテイラーの定理」では 1 変数関数の微分に焦点を当て，平均値の定理，すなわち一次関数による 1 変数関数の近似の一般化である「テイラーの定理」やその応用について解説しました．この vol.2 では 2 変数関数の極限や連続性をスタート地点とし，2 変数関数における偏微分の理論やそれを用いた極値の求め方について詳しく解説していきます（以降解説する事項の多くは 3 変数以上でも成り立ちますが，簡単のため 2 変数に絞って解説します）．

6　2 変数関数の極限と連続性

6.1　平面の開集合

以降，平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (a,b) を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の円の内部 $B_\varepsilon(a,b)$ を次のように書きます．

$$B_\varepsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}. \tag{21}$$

定義 6.1. U を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする．U が**開集合（open set）**であるとは，U に含まれる任意の点 (a,b) に対して，$B_\varepsilon(a,b) \subset U$ となる実数 $\varepsilon > 0$ が存在することをいう．

開集合は直感的には，図 2 のように境界を含まない集合（平面図形）と理解するとよいでしょう．以下の例は非常に単純な形をした開集合ですが、「境界を含まない」という感覚の理解の助けになると思われます．

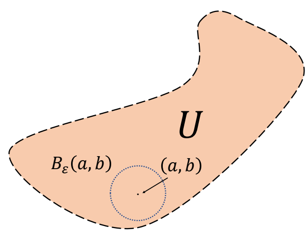

図 2: 開集合のイメージ

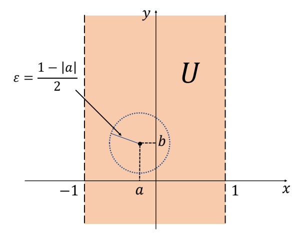

図 3: $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$（例 6.2）

例 6.2. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$（図 3）は，開集合となります．$U$ 内の任意の点 (a,b) に対し，正の実数 ε を $\varepsilon = \frac{1-|a|}{2}$ とおきます．このとき，$B_\varepsilon(a,b)$ の中心 (a,b) と最も近い U の境界の点は，$-1 < a \leq 0$ のとき，$(-1,b)$ となり，$0 < a < 1$ のとき，$(1,b)$ となります．これらの点と (a,b) の距離は，$1-|a|$ となります．しかし，$B_\varepsilon(a,b)$ の半径は，その $\frac{1}{2}$ の大きさなので，$B_\varepsilon(a,b)$ は U に含まれることが示されます．したがって，定義 6.1 より，U は開集合です．

6.2　多変数関数の極限・連続性

この節では，1 変数関数と同様に 2 変数関数においても極限の概念を拡張でき，それと同様に連続性の拡張も可能であることを説明します．以降，全ての 2 変数関数 $f(x,y)$ は開集合 U 上で定義されるものとします．

定義 6.3. $(x,y)\in U$ が，点 (a,b) と異なる点を取りながら点 (a,b) に どのような近づき方をしても2 変数関数 $f(x,y)$ の値が k に近づくとき，k は $f(x,y)$ の点 (a,b) に関する**極限（limit）**であるといい，以下のように書き表す．

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=k. \tag{22}$$

2 変数関数の定義域は 1 変数関数の時と違い，縦横の広がりを持った平面図形となります．よって，点への近づき方が無数にあります（図 4）．このことから、近づき方によって極限の値が異なる場合があり，その場合関数は極限を持ちません．

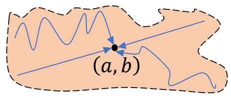

図 4: 2 変数関数の極限

例 6.4. 次の関数の極限を調べます．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{23}$$

$y=x$，$y=-x$ に沿った極限をそれぞれ求めると，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x^2}{2x^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

となります．したがって，2 つの直線に沿った極限が異なるので，極限 (23) は存在しません．

極限の存在を判定するとき，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と極座標へと変換して調べることは有効な方法です．

例 6.5. 次の関数の極限を調べます．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}. \tag{24}$$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおくと，$(x,y)\to(0,0)$ ならば，どのような近づき方をしても $r\to+0$ となるので，三角不等式より，

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| &= \left|r\cos^3\theta+r\sin^3\theta\right|\\ &\leqq \left|r\cos^3\theta\right|+\left|r\sin^3\theta\right|\\ &\leqq r+r\to0.\end{aligned}$$

したがって，この関数の極限は 0 であることがわかります．

定義 6.6. 点 $(a,b)\in U$ で関数 $f(x,y)$ が**連続（continuous）**であるとは，以下が成り立つことをいう．

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b) \tag{25}$$

1 変数の場合と同様に，2 変数の連続関数においても，和・差・積・商の連続性が成り立ちます．

定理 6.7. $f(x,y)$，$g(x,y)$ が点 (a,b) で連続ならば，cf，$f\pm g$，fg，$\frac{f}{g}$ は点 (a,b) で連続である．ただし，$c\in\mathbb{R}$ で，$\frac{f}{g}$ においては，$g(a,b)\neq0$ とする．

1 変数関数の場合 (定義 2.6) と同様にランダウの記号を 2 変数関数についても定めることができます．

定義 6.8. f,g,h を 2 変数関数とする．$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=0$ となるとき，

$$f(x,y)=o(g(x,y))\quad ((x,y)\to(a,b)) \tag{26}$$

と書く．また，$f(x,y)-h(x,y)=o(g(x,y))\quad (x\to a)$ のとき，

$$f(x,y)=h(x,y)+o(g(x,y))\quad ((x,y)\to(a,b)) \tag{27}$$

と書く．

6.3 偏微分・全微分可能性

定義 6.9. 関数 f が点 $(a,b)\in U$ において，変数 x に関して偏微分可能であるとは，$y=b$ と固定して得られる x の 1 変数関数 $f(x,b)$ が，$x=a$ で微分可能であることをいう．このとき，$f(x,b)$ の $x=a$ における微分係数を，点 (a,b) における変数 x に関する**偏微分係数（partial derivative）**といい，以下のように書き表す．

$$f_x(a,b),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b). \tag{28}$$

y に関する偏微分係数 $f_y(a,b)$ も同様に定義できる．また，f が U の各点において，変数 x に関して偏微分可能であるとき，U 上の関数 $f_x(x,y)$ を $z=f(x,y)$ の変数 x に関する**偏導関数（partial derivative）**といい，次のように表す．y に関する偏導関数 $f_y(x,y)$ も同様に定義できる．

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad z_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{29}$$

1 変数の場合は，微分によって接線の傾きが求められました．2 変数の場合，上の偏微分によって接平面の「傾きのようなもの」が求められます（定義 6.12 参照）．ただし，偏微分には 1 変数の微分とは異なる点があります．1 変数関数 $f(x)$ は，点 $x=a$ で微分可能であれば，$f(x)$ は $x=a$ で連続となりました．しかし，2 変数関数 $f(x,y)$ においては，**点 (a,b) で x および y に関して偏微分可能でも，(a,b) で連続とは限りません．** 2 変数関数において，連続性の十分条件を与えるのが全微分可能性と呼ばれるものになります．

定義 6.10. 関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in U$ で**全微分可能（totally differentiable）**であるとは，$(x,y)\to(a,b)$ のとき，

$$f(x,y)-f(a,b)=m(x-a)+n(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) \tag{30}$$

を満たす $m,\ n\in\mathbb{R}$ が存在することをいう．ここで，o はランダウの記号（参照：定義 6.8）を表す．

2 変数の場合の微分可能とは，偏微分可能ではなく全微分可能を指すことが多いです．1 変数の場合，1 変数関数 f が a で微分可能であれば，

$$f(x)-f(a)=m(x-a)+o(x-a)\quad (x\to a) \tag{31}$$

のような 1 次関数による近似が成り立ちます (例 2.7)．

2 変数の場合は 1 次式による近似が成り立つことを微分可能の定義にしていると思うと，全微分可能の定義の意味がつかみやすいかもしれません．

また，全微分可能であれば偏微分可能で，定義 6.10 の m,n はそれぞれ $f_x(a,b), f_y(a,b)$ と一致します．

関数の全微分可能性を確かめるには，以下の定理を用いるのが有効です．

定理 6.11. 関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)\in U$ を中心とする円の内部で偏微分可能で，f_x，f_y が点 (a,b) で連続ならば，$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能であり，

$$f(x,y)-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) \tag{32}$$

が成り立つ．

等式を見ると，関数 $f(x,y)$ が 1 次関数 $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$ で近似されていることがわかります．このことから，2 つのグラフ $z=f(x,y)$ と $z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$ は 3 次元の点 $(a,b,f(a,b))$ の周りでは，非常に近いことがわかります．また点 $(a,b,f(a,b))$ を 2 つのグラフは共有しています．これらの観察から，次のように接平面を定義します．

定義 6.12. 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とする．このとき，

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b) \tag{33}$$

を曲面 $z=f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における**接平面（tangent plane）**と呼ぶ．

全微分可能性は，上で述べたように 2 変数関数における連続性の十分条件となります (証明は等式 (30) の両辺の極限を考えればよく，ランダウの記号の理解を量る練習問題になります)．このことからも 2 変数の場合の微分可能性として，偏微分可能性ではなく全微分可能性が適当であることがわかります．

定理 6.13. 関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in U$ で全微分可能ならば，$f(x,y)$ は点 (a,b) で連続となる．

6.4　2 変数関数の極値の判定法

偏導関数を求めることにより，1 変数関数の場合と同様に，2 変数関数の極値を求めることができます．この節では，その方法および定理を紹介し，例を用いて詳しく解説していきます．

定義 6.14. 関数 $z = f(x,y)$ が x に関して偏微分可能かつ，その偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ が y に関して偏微分可能なとき，偏導関数 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ を次で表す．

$$z_{xy}, \quad f_{xy}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{34}$$

と表す．また，$\frac{\partial f}{\partial x}$ が x に関して偏微分可能なとき，その偏導関数 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ を次で表す．

$$z_{xx}, \quad f_{xx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{35}$$

f_{yx}，f_{yy} も同様に定義する．これらを **2 次の偏導関数（second order partial derivative）** という．

2 次の偏導関数 f_{xy} と f_{yx} の結果は，常に等しくなるとは限りません．しかし，関数 f が C^2 級と呼ばれるよい性質をもつ場合，f_{xy} と f_{yx} の結果は等しくなります．

定義 6.15. $f(x,y)$ が 2 次の偏導関数をもち，それらがすべて連続であるとき，$f(x,y)$ は U における **C^2 級関数（C^2- function）** であるという．

1 次関数の場合の C^n 級の定義（定義 2.10）を参照すると，2 変数関数に対する C^2 級の定義を飲み込みやすいでしょう．

定理 6.16. 関数 $f(x,y)$ が C^2 級関数のとき，$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ が成り立つ．

さらに，C^2 級の 2 変数関数についても，1 変数の場合と同様に Taylor の定理が成り立ちます．1 変数のように，2 変数に対しても m 次の導関数，C^m 級の定義をし，下の定理よりも一般の形のテイラーの定理を述べることはできますが，ここでは触れないことにします．

定理 6.17 (2 変数関数に対する 2 次の Taylor の定理)**.** $f(x,y)$ を U 上の C^2 級関数とする．このとき，$(h,k) \to (0,0)$ において，

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2)+o(h^2+k^2) \tag{36}$$

が成り立つ．

1 変数の場合，定理 2.11 において，$x = a+h, n = 2$ の場合を考えると，

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + o(h^2) \tag{37}$$

が成り立ちます．上の定理と見比べてみてください．

それでは，2 変数関数における極値の定義を行います．

定義 6.18. 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で極大値（**local maximum value**）を取るとは，以下を満たす $\varepsilon > 0$ が存在することをいう．

$$f(a, b) > f(x, y) \ \ ((x, y) \in B_\varepsilon(a, b), (x, y) \neq (a, b)). \tag{38}$$

極小値（**local minimum value**）についても同様に定義する．

極値を取る点では，偏導関数においても 1 変数関数と同様の結果 (微分可能な 1 変数関数 $f(x)$ が $x = a$ で極大（小）値を取るとき $f'(a) = 0$ です）が成り立ちます．

定理 6.19. 関数 $f(x, y)$ が偏導関数 f_x，f_y をもつとする．このとき，$f(x, y)$ が点 $(a, b) \in U$ で極値をとるならば，$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

定理 6.19 を使うことにより，極値を取る点の候補を導くことができます．それらの点が実際に極値となるかどうかを判定するには，以下の定理が有効です．

定理 6.20. $f(x, y)$ を U 上で定義された C^2 級関数とする．また，点 $(a, b) \in U$ において，$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ とする．$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$ と定義する．このとき，以下が成り立つ．

(1) $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば，f は点 (a, b) で極小値をとる．

(2) $D > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば，f は点 (a, b) で極大値をとる．

(3) $D < 0$ ならば，f は点 (a, b) で極値をとらない．

注意 6.21. $D = 0$ となる点では，極値になることもならないこともあります．その判定には，極値の定義を用いて，その点の近くでの関数のふるまいを詳しく見てやる必要があるため，一般的に判定は容易ではありません．

この定理により，関数の極値を求めることができる理由を説明します．簡単のため $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ とおきます．関数 $f(x, y)$ の点 (a, b) における 2 次のテイラーの定理（参照：定理 6.17）により，

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(h^2 + k^2) \ \ ((h, k) \to (0, 0)) \tag{39}$$

と変形できます．vol.1 でも説明したように，変数 h, k による 2 変数関数 $\frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$ は原点 $(h, k) = (0, 0)$ の近くで $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ の近似となっていることがわかります．したがって，「関数 $g(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ のふるまいをを調べることで，$f(a, b)$ が極値かどうかを判定できないだろうか？」と考えることができます．この考え方をもとに，関数 $g(h, k)$ のふるまいを，定理 6.19 の条件 (1), (2), (3) に分けて考察しましょう．

(1) $D > 0$ かつ $A > 0$ のとき．

$g(h, k)$ に対し，次のように平方完成を行います．

$$g(h, k) = A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{D}{A}k^2 \tag{40}$$

$$= A\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{D}{A^2}k^2\right). \tag{41}$$

A は正の定数であることから，関数 $g(h, k)$ のふるまいは，関数 $w = \left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{D}{A^2}k^2$ のふるまいを求めることで分かります．いま，$u = \left(h + \frac{B}{A}k\right)$, $v = \frac{\sqrt{D}}{A}k$ とおくと，

$$w = u^2 + v^2 \tag{42}$$

となります．また，w の値を固定し，uv 平面上に図示すると，$u^2 + v^2$ は円であることがわかります（図 5 では $w = 1$）．したがって，w の値を変化させることで，半径の異なる円が $w \geq 0$ 上に積み重なったようなグラ

フとなることがわかります（図 6）．また，$u^2+v^2 \geq 0$ であり，$(u,v)=(0,0)$ のときのみ，等号が成立します．よって，

$$\begin{cases} h+\dfrac{B}{A}k=0 \\ \dfrac{\sqrt{D}}{A}k=0 \end{cases} \tag{43}$$

を解くことで，$(h,k)=(0,0)$ のときのみ，$u^2+v^2=0$ が成立することがわかります．したがって，$\frac{1}{2}g(h,k)$ が $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ の近似であることを考え合わせると，原点 $(h,k)=(0,0)$ の近くでは，$f(a+h,b+k)>f(a,b)$ となり，$f(a,b)$ が極小値であることが導かれます．

(2) $D>0$ かつ $A<0$ のとき．

$g(h,k)$ の式変形 (40) に対し，(1) と同様に $u=\left(h+\frac{B}{A}k\right)$, $v=\frac{\sqrt{D}}{A}k$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(h,k) &= -A\left(-\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2-\frac{D}{A^2}k^2\right) && (44) \\ &= -A(-u^2-v^2) && (45) \end{aligned}$$

が導かれます．$-A$ は正の定数であることから，関数 $g(h,k)$ のふるまいは，関数 $w=-u^2-v^2$ のふるまいを求めることで分かります．(1) と同様 $w=-u^2-v^2$ の uvw 空間上での概形は，半径の異なる円が $w\leq 0$ 上に積み重なったようなグラフとなることがわかります（図 7）．また，$-u^2-v^2 \leq 0$ であり，$(h,k)=(0,0)$ のときのみ等号が成立することが (1) と同様の計算で分かります．よって，原点 $(h,k)=(0,0)$ の近くでは，$f(a+h,b+k)<f(a,b)$ となり，$f(a,b)$ が極大値であることが導かれます．

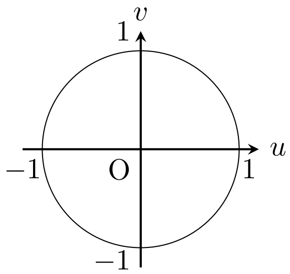

図 5: 円 $u^2+v^2=1$

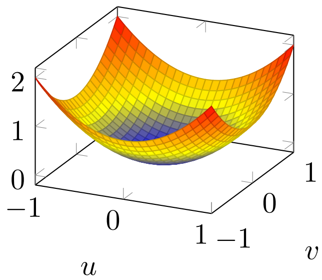

図 6: グラフ $w=u^2+v^2$

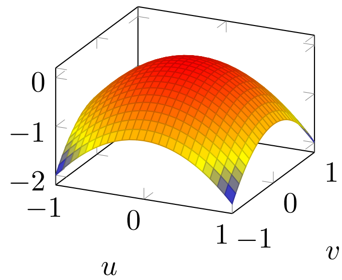

図 7: グラフ $w=-u^2-v^2$

(2) $D<0$ のとき．

まずは $A>0$ の場合について調べます．$g(h,k)$ の式変形 (41) に対し，$u=\left(h+\frac{B}{A}k\right)$, $v=\frac{\sqrt{-D}}{A}k$ とおくと，

$$g(h,k)=A(u^2-v^2) \tag{46}$$

が導かれます．$w=u^2-v^2$ の w の値を固定し uv 平面上に図示すると，これは双曲線であることがわかります（図 8）．よって，w の値を連続的に変化させることで，図 9 のようなグラフを描くことができます．これは，$(u,v)\neq(0,0)$ とし，$u=2v$ とおくと，$w=3v^2>0$ となり，$u=\frac{1}{2}v$ とすると，$w=-\frac{3}{4}v^2<0$ となるため，$(u,v)=(0,0)$ の周りでは正の値・負の値どちらも存在することがわかります．ここから，$(h,k)=(0,0)$ の周りでは $f(a+h,b+k)>f(a,b)$ にも $f(a+h,b+k)<f(a,b)$ にもなりうるため，$f(a,b)$ は極値ではないことがわかります．

そのほかの場合も $A>0$ のときと同様に調べることができます．$A<0$ のときは $g(h,k)=-A(-u^2+v^2)$ となるので，$w=-u^2+v^2$ の uvw 空間上での概形は，$A>0$ の場合の $w=u^2-v^2$ のグラフが上下反転したものであることがわかります（図 10）．よって，$A>0$ の場合と同様に，$(u,v)\neq(0,0)$ として $u=2v$, $u=\frac{1}{2}v$ とおくことで，$f(a,b)$ が極値ではないことがわかります．

$C\neq 0$ のときは，変数 k による平方完成を行うことで，

$$g(h,k)=C\left(\left(k+\frac{B}{C}h\right)^2+\frac{D}{C^2}h^2\right)=-C\left(-\left(k+\frac{B}{C}h\right)^2-\frac{D}{C^2}h^2\right) \tag{47}$$

となります．よって，$u = \left(k + \frac{B}{C}h\right)$, $v = \frac{\sqrt{-D}}{C}h$ とおき，$C > 0$ のときは $w = u^2 - v^2$（図 9）を調べることで，$C < 0$ のときは $w = -u^2 + v^2$（図 10）を調べることで $f(a,b)$ が極値でないことがわかります．

$A = C = 0$ のときは，$D \neq 0$ であることから $B \neq 0$ が導かれます．また，

$$g(h,k) = 2Bhk = \frac{B}{2}((h+k)^2 - (h-k)^2) = \frac{-B}{2}(-(h+k)^2 + (h-k)^2) \tag{48}$$

となることがわかります．よって，$u = h + k$, $v = h - k$ とおき，B の正負に応じて $w = u^2 - v^2$（図 9），$w = -u^2 + v^2$（図 10）を調べることで $f(a,b)$ が極値でないことがわかります．

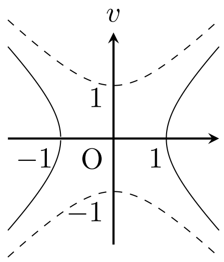

図 8: 双曲線 $u^2 - v^2 = \pm 1$

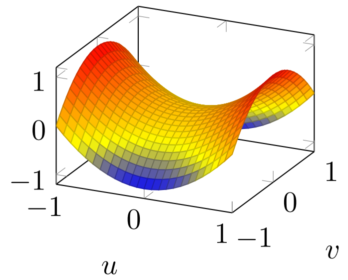

図 9: グラフ $w = u^2 - v^2$

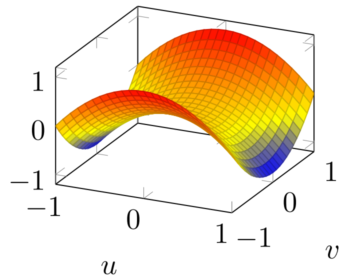

図 10: グラフ $w = -u^2 + v^2$

例題 6.22. 次の関数の極値を求めよ．

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + xy - 2x - 4y. \tag{49}$$

（解答） まずは $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を求める．すなわち，連立方程式

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x + y - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = y^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \tag{50}$$

を解けばよい．上の式を移項すると，$x = 2 - y$ となる．これを下の式に代入して，

$$y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0$$

となることから，$y = -1, 2$ が導かれる．これらを上の式に代入して，

$$\begin{aligned} &y = -1 \text{ のとき}, x = 2 - (-1) = 3, \\ &y = 2 \text{ のとき}, x = 0 \end{aligned}$$

が導かれる．よって，極値を取る候補の点は $(3,-1)$, $(0,2)$ である．これらの点における D の値を調べる．$f_{xx}(x,y) = 1$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 2y$ より，点 $(0,2)$ において，$f_{yy}(0,2) = 4$ となることから，D の値は，

$$D = f_{xx}(0,2)f_{yy}(0,2) - f_{xy}(0,2) = 1 \times 4 - 1 = 3 > 0$$

となる．よって，$f(x,y)$ は点 $(0,2)$ で極小値 $f(0,2) = -\frac{16}{3}$ をとる．一方，点 $(3,-1)$ では，$f_{yy}(3,-1) = -2$ となることから，D の値は，

$$D = f_{xx}(3,-1)f_{yy}(3,-1) - f_{xy}(3,-1) = 1 \times (-2) - 1 = -3 < 0$$

となる．よって，$f(x,y)$ は点 $(3,-1)$ で極値をとらない．