核心解説：微分積分学I

vol.1 平均値の定理とテイラーの定理

作成者：乙戸勇大，吉田啓佑，吉田大河（監修：数学教室）

1　はじめに

この資料は微分積分学 I を受講している（あるいは受講していた）学生向けの資料です．微分積分学 I のほとんどの受講者は高校などで，数学 III に相当する内容を履修していると思われます．従って，数学 III の内容を前提とします．

微分積分学 I では高校の頃よりも一般化された微分が扱われます．本資料では「**テイラーの定理（平均値の定理の一般化）**」と「**多変数の場合の極値の求め方**」を今回のトピックとします．

2　平均値の定理とテイラーの定理

数学 III の内容ではありますが，初めに平均値の定理について復習します．本資料で開区間とは，

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\},$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\},$$

$$(a,\infty) = \{x \mid a < x\},$$

$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

のいずれかの形をした集合のこととします（ただし a,b は $a<b$ を満たす実数で，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す記号です）.

定理 2.1 (**平均値の定理**). f を開区間 I 上の微分可能な関数とし，$a \in I$ とする．このとき a ではない任意の $x \in I$ に対して，次を満たすような $c \in (a,x)$ もしくは $c \in (x,a)$ が存在する（$a<x$ のときは $c \in (a,x)$，$x<a$ の場合は $c \in (x,a)$ である）.

$$f'(c)(x-a) = f(x) - f(a). \tag{1}$$

注意 2.2. 定理 2.1 において $x=a$ とすると，等式 (1) は $f'(c)$ の値に依らず成り立ちます．

前述の通り，本資料では平均値の定理のある意味における一般化を扱います．一般化のために平均値の定理の意味について少し触れることにします．等式 (1) では $f'(c)$ によって点 $(a,f(a))$ と点 $(x,f(x))$ を結ぶ直線の傾きが与えられています．このことから微分可能な関数は一次関数によって近似されうることが示唆されます (微分の定義から示唆されていると言ってもよいです)．しかしながら，その近似の精度は十分ではないことも多く，より高精度の近似が求められます．そのような要請に応え得るものがテイラーの定理です．テイラーの定理のアイデアは高次関数で近似するというものです．高次関数には一次関数の場合よりも多くの項が存在するので，それらをどのように与えるのかを考えなくてはなりません．その準備として次の n 回微分について復習します．

定義 2.3. I を開区間とし，f を I 上で微分可能な関数とする．f' が I 上で微分可能であるとき，f は I 上で **2 回微分可能 (second order differentiable)** であると言い，f' の導関数を f'' と書き，f の **2 次導関数 (second derivative)** と言う．

f'' が開区間 I 上で微分可能の時，f は 3 回微分可能と言い，3 次導関数 f''' が定まります．f''' が I 上微分可能の時 $\cdots$ という具合に同様の方法で n 回微分と n 次導関数を定めます（ここで n は 1 以上の整数です）．5 次導関数を f''''' などの様に書いてしまうと，記号が煩雑になることが予想されます．そこで以下では n 次導関数を $f^{(n)}$ と書くことにします．つまり $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ が成り立ちます．また $f^{(0)} := f$ と定義します．この記号の下，次のテイラーの定理が成り立ちます．

定理 2.4 (**テイラーの定理** (Taylor's theorem))**.** f を開区間 I 上で n 回微分可能な関数とし，$a \in I$ とする．このとき a ではない任意の $x \in I$ に対して，次を満たすような $c \in (a, x)$ もしくは $c \in (x, a)$ が存在する．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}. \tag{2}$$

注意 2.5. 定理 2.4 において $n = 1$ の場合は定理 2.1 と同じ主張になっています．このことからテイラーの定理が平均値の定理の一般化であることがわかります．

等式 (2) を見てみると $\frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}$ が十分に 0 に近いときは，$f(x)$ が x に関する $(n-1)$ 次多項式 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ によって近似されていることがわかります（ここで $f^{(n)}(c)$ は x に依存して決まるため，$\frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}$ は x の n 次式ではないことに注意してください．仮にそうであれば $f(x)$ が多項式になってしまいます）．従って $\frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!}$ の絶対値の大きさを評価することが求められます．そのための道具として次の記号を導入します．

定義 2.6. f, g, h を関数とする．$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ となるとき，

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{3}$$

と書く．また，$f(x) - h(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$ のとき，

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{4}$$

と書く．

上のような記法を**ランダウの記法 (Landau notation)** と呼び，o を**ランダウの記号 (Landau symbol)** と呼びます．簡単に言えば x を a に十分近づけるときは o の中身 (上では $g(x)$) に比べその他の箇所 ($f(x)$ や $f(x) - h(x)$) は無視しても良いほど小さいという意味です．また，上述のことから関数 f の a における極限値が α であるとき，$f(x) = \alpha + o(1) \quad (x \to a)$ であることがわかります（ここで $o(1)$ の 1 とは常に値が 1 である定数関数を表しています）．しばらくは，ランダウの記号の扱いには戸惑うことかと思います．まずは例を扱います．

例 2.7. 関数 f が a で微分可能とします．つまり，ある実数 m に対して，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$$

が成り立ちます（通常この m を $f'(a)$ と書きますが，後の全微分の定義との兼ね合いから m のまま進めます）．これをランダウの記号を用いて表すと，

$$f(x) = f(a) + m(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a) \tag{5}$$

となります．これは関数 $f(x)$ が x の 1 次関数 $f(a) + m(x-a)$ によって a の近くでは近似されていることを表しています．また，$o(x-a)$ はその近似の誤差が $x - a$ に比べて小さいことを表しています．微分と「1 次関数による近似」の紐づけは，2 変数関数の場合の全微分のイメージをつかむのに役立ちます．

例 2.8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ です．これは $\cos x = 1 + o(x) \quad (x \to 0)$ と表せます．

例 2.8 のように，定義 2.6 において $g(x) = x$ の場合を考えると，式中に $o(x)$ が現れます．これが関数のように見えるかもしれませんが，ランダウの記号において $o(x)$ は関数を表しているわけではありません．例えば例 2.8 の式に，$x = \frac{\pi}{4}$ を代入して，

$$o\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

とするような操作は完全な誤りです．このように扱いに気を使う必要があるランダウの記号ですが，次の命題のような指数法則的な操作は可能です．

命題 2.9. k を 0 以上の整数とし，$f(x) = o((x-a)^k) \quad (x \to a)$ とする．このとき任意の $c \in \mathbb{R}$ と任意の 0 以上の整数 l に対して，

$$c(x-a)^l f(x) = o((x-a)^{k+l}) \quad (x \to a) \tag{6}$$

が成り立つ．つまり $c(x-a)^l o((x-a)^k) = o((x-a)^{k+l}) \quad (x \to a)$ である．特に $f(x) = o(1) \quad (x \to a)$ であれば，

$$c(x-a)^l f(x) = o((x-a)^l) \quad (x \to a) \tag{7}$$

である．つまり $c(x-a)^l o(1) = o((x-a)^l) \quad (x \to a)$ である．

左辺を $(x-a)^l$ で割ったものの極限を考えることで，上の命題を示すことができます．詳細は演習問題とします．

話題をテイラーの定理に戻します．等式 (2) において $f^{(n)}$ が連続であると仮定します．すると挟み撃ちの原理から $x \to a$ のとき，$c \to a$ です．従って，

$$\lim_{x \to a} f^{(n)}(c) = \lim_{c \to a} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) \tag{8}$$

が成り立ちます．これをランダウの記号を用いて書き直すと

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + o(1) \quad (x \to a) \tag{9}$$

が得られます．等式 (9) を等式 (2) に代入し，命題 2.9 を使うと，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n) \quad (x \to a) \tag{10}$$

が得られます．ここでランダウの記号の意味を振り返ると，$f(x)$ と $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ の差は $(x-a)^n$ に比べて小さいということがわかります．これは $f(x)$ の多項式による近似 $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$ の誤差は最大で $(x-a)^n$ 程度であることを意味します．具体例の場合に精度の良い近似になっていることを，後ほどグラフを使って確かめます（例 2.12 参照）．

等式 (10) の導出に $f^{(n)}$ が連続であることを仮定しました．このように n 次導関数が連続であるという性質が重要であることがあります．そこでこの性質には次の定義のような呼称が与えられています．

定義 2.10. 関数 f が開区間 I 上で n 回微分可能であり，n 次導関数 $f^{(n)}$ が I 上で連続であるとき，f は I 上で C^n **級関数** (C^n**–function**) であると言う．
また，任意の自然数 n について，f が I 上で C^n 級であるとき，f は C^∞ **級関数** (C^∞**–function**) であると言う．

C^∞ 級の定義が少しわかりにくいと感じるかもしれません．その場合は C^∞ 級な関数を「無限回微分可能な関数」と捉えて読み進めてください．$\sin x$ や x^3 などの微分積分学 I で扱う関数は概ね C^∞ 級です．

C^n 級であることを仮定すると，命題 2.9 の下の議論から，テイラーの定理を次のように書き換えられます．

定理 2.11 (**テイラーの定理** (Taylor's theorem))**.** f を開区間 I 上で C^n 級とし，$a \in I$ とする．このとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n) \quad (x \to a) \tag{11}$$

が成り立つ．

テイラーの定理を使って極限を求める場合など，定理 2.11 の形の方が有用であることがあります．定理 2.4 と定理 2.11 のどちらの形も使いこなせることが望ましいです．

次の例は $\sin x$ に対する定理 2.11 の適用例です．

例 2.12 ($\sin x$ とその近似)．テイラーの定理によって本当に多項式による近似が得られているのかを確かめます．

$f(x) = \sin x$，$a = 0$，$n = 3, 7$ について等式 (10) を使うと，

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),\quad f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7) \tag{12}$$

が得られます（上から順に 3 次，7 次の $x \to 0$ における近似）．図 1 では $y = \sin x$，$y = x - \frac{x^3}{6}$，$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ の 3 つのグラフを描いています（それぞれ赤，緑，黒）．グラフを見ると原点の周りではかなり良い近似になってることがわかります．原理的には原点の周りでは 7 次の近似の方がよい近似になりますが，原点から離れると $o(x^3), o(x^7)$ を無視することができなくなるため，次数を上げても良い近似になるとは限らないことに注意してください．

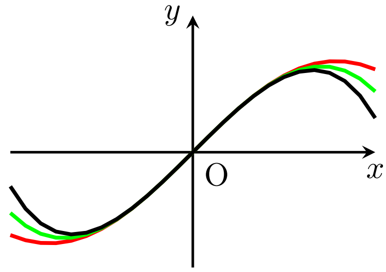

図 1: $y = \sin x$ 及び近似のグラフ

またテイラーの定理から，次のような不定形の極限を求めることもできます．

例題 2.13. 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

（解答） テイラーの定理より，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0)$$

である．つまり

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{6x^3} = 0$$

である．よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}.$$

この問題をロピタルの定理を用いて解くこともできますが，分母や分子の形がより複雑な場合は，テイラーの定理を使うほうが計算コストは小さいことが多いです．

3 テイラー展開

前節では，テイラーの定理を使い関数を多項式で近似しました．この節ではテイラーの定理を発展させ，C^∞ 級の関数を「無限個の多項式」で表すことを目標にします．

関数 f を C^∞ 級とします．このとき任意の自然数 n について定理 2.4 を使うことができます．ここで $n \to \infty$ とすることを考えます．すると，等式 (2) において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-a)^n}{n!} = 0$ となるような x については，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \tag{13}$$

が成り立ちます（関数 f 次第では上の式が成り立たないような x が存在することには留意してください）．等式 (13) の展開を**テイラー展開 (Taylor expansion)** と呼びます．特に $a = 0$ の場合は**マクローリン展開 (Maclaurin expansion)** と呼びます．

例 3.1 (マクローリン展開の具体例)．$f(x) = \cos x, a = 0$ とします．このとき任意の n について $f^{(n)}(x)$ の絶対値は $|\cos x|$ または $|\sin x|$ のいずれかであることを使えば，等式 (2) より

$$\frac{|f^{(n)}(c)x^n|}{n!} \leq \frac{|x|^n}{n!} \tag{14}$$

が得られます．この右辺について $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ が任意の実数 x について成り立つことが知られています（良い演習問題ですので挑戦してみると良いでしょう）．よって $\cos x$ はすべての x についてマクローリン展開を考えることができ，そのマクローリン展開は

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{15}$$

であることが各 $f^{(n)}(0)$ を求めることでわかります．$\sin x$ についても同様にしてマクローリン展開

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{16}$$

が得られます．他にもいくつかの関数のマクローリン展開が知られています．

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (x \text{ は任意の実数}) \tag{17}$$

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\qquad (-1<x\le 1) \tag{18}$$

などは自分で計算できるようにしておくとよいでしょう．

4　テイラーの定理と極値

この章ではテイラーの定理の応用として，極値の判定を行います．極大（極小）値の定義から始めます．

定義 4.1. 関数 $f(x)$ が a で**極大値（local maximum value）**を取るとは，以下を満たす $\varepsilon>0$ が存在することをいう．

$$f(a)>f(x)\ \ (a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, x\neq a). \tag{19}$$

関数 $f(x)$ が a で**極小値（local minimum value）**を取るとは，以下を満たす $\varepsilon>0$ が存在することをいう．

$$f(a)<f(x)\ \ (a-\varepsilon<x<a+\varepsilon, x\neq a). \tag{20}$$

定義は少し難しく見えますが，a を含む十分に小さい開区間上では $f(a)$ が最大 (最小) 値になる，と述べているにすぎません．数学 III 以前で身に着けた極値のイメージを変える必要はありません．数学 III で学んだように，次のことが成り立ちます．

定理 4.2. 関数 $f(x)$ が開区間 I 上で微分可能とする．このとき，$f(x)$ が点 $a\in I$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$ である．

では，逆に C^2 級関数 $f(x)$ に対して $f'(a)=0$ となる a で f が極値を取るか判別してみましょう．定理 2.11 で $n=2$ の場合を考え，$f'(a)=0$ であることを用いると，

$$f(a+h)=f(a)+f''(a)h^2+o(h^2)\quad (h\to 0)$$

がわかります．つまり h が非常に小さければ，$f(a+h)$ は $f(a)+f''(a)h^2$ によって近似されています．よって，$f''(a)>0$ であれば，

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f''(a)h^2>f(a)\quad (h\neq 0)$$

が成り立ちます．以上をまとめて述べると次のような定理になります．

定理 4.3. 関数 $f(x)$ が開区間 I 上で微分可能とし，$f'(a)=0$ とする．このとき $f''(a)>0$ であれば，f は a で極大値を取る．

なお同様にして，$f''(a)<0$ から極小値であることがわかります．$f''(a)=0$ の場合の判定には，より高次の微分を計算する必要があります．

2 変数関数の場合の極値の判定にも，上の議論と似たことをします．1 変数の場合のことを頭に入れておくと良いでしょう．