# 核心解説：線形代数学 I
## vol. 5 行列式の求め方

作成者：黒田 匡迪, 辻栄 周平 （監修：数学教室）

## 5.1 はじめに

「**vol. 1 行列の基本変形のやり方**」において, 以下の 3 つの問題

**問題 1** 連立一次方程式を解く問題　　**問題 2** 逆行列を求める問題　　**問題 3** 行列式を求める問題

は基本変形を繰り返し行うことで, 解くことが出来ると述べました.

この **vol. 5** では, 「**vol. 1 行列の基本変形のやり方**」と「**vol. 2 基本変形の仕組み**」を踏まえた

**問題 3 行列式を求める問題**

の解法を紹介していきます. また, 章末では補足として「**行列式の幾何学的な意味**」についても解説します.

## 5.2 「問題 3 行列式を求める問題」の解法

与えられた正方行列 $A$ の『行列式』を求める方法を紹介します. まず, 行列式の定義を確認しておきましょう.

**定義 5.2.1** (行列式)**.** $n$ 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ に対し,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

とおき, $A$ の行列式という. $\det A$ を $|A|$ とかく場合もある.

**注意 5.2.2.** 定義の中に, $S_n$, $\sigma$, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ といった記号が出てきますが, 行列式を具体的に計算する上では, 知らなくても大丈夫です. 実際に計算をする上では定義はあまり役に立ちません. 行列式の定義を知らなくても, 基本変形を用いた一定のアルゴリズムで行列式の計算ができる, というのが, 行列の理論の核心です.

まずは, $n = 2$ の場合の行列式の計算を見てみましょう.

**例 5.2.3** ($n = 2$ の場合)**.** $S_2 = \{\mathrm{id},\ \sigma := (1\ 2)\}$ なので, 定義より, 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式は

$$\det A = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) a_{1\mathrm{id}(1)} a_{2\mathrm{id}(2)} + \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

となります. ここでは, 定義通りに計算を行いましたが, 上の注意にあるように, 定義は知らなくても大丈夫です. 但し,

2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ の行列式は $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ である,

ということは, 公式として必ず覚えてください.

次に, $n \geq 3$ の場合の行列式の計算方法を紹介します．この場合は, 次の性質を用いて, $n=2$ の場合の計算に帰着させます：

### 行列式の性質

(1) 1 つの行を $a$ 倍すると行列式は $a$ 倍になる.

(2) 2 つの行を入れ替えると行列式は $-1$ 倍になる.

(3) 1 つの行に別の行の $a$ 倍を加えても, 行列式の値は変わらない.

ここで, 「行」を「列」に置き換えたものも成立.

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ここで, 右辺の行列式は $n-1$ 次正方行列の行列式であることに注意してください.

**注意 5.2.4.** (1), (2), (3) は, 「基本変形」と「行列式」の関係を表しています．つまり, 基本変形を行うと行列式がどのように変化するか, を表しています．一方, **vol. 1** の簡約化の手順の **Step 1** と **Step 3** を行うことで, (4) の左辺の形になり, (4) より, 行列の型を 1 つ小さくすることが出来ます．従って, 「基本変形を繰り返し行って, 行列式を計算していくと, いずれは 2 次正方行列の公式に帰着させることが出来る」ということになります．これが, このプリントの最初に述べた「行列式は基本変形を繰り返し行うことで求まる」ということの理由です.

それでは, 具体的な計算を行う前に, 上の「行列式の性質」が成り立つ理由を説明しておきます．(4) は, 行列式の定義から直接, 確かめることができます．(1), (2), (3) は次の 2 つの事実から証明できます：

**(i)** 基本行列 $P(i;a)$, $Q(i,j)$, $R(i,j;a)$ の行列式はそれぞれ, $\det P(i;a) = a$, $\quad \det Q(i,j) = -1$, $\quad \det R(i,j;a) = 1$

(これは, 基本行列の成分の多くが 0 であるため定義から直接, 計算することでわかります).

$$\textbf{(ii)}\ \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

実際, 行列式の性質の (1), (2), (3) の基本変形はそれぞれ, 「左」から $P(i;a)$, $Q(i,j)$, $R(i,j;a)$ を掛けることと同じでした．従って, 上の事実 **(i)**, **(ii)** から, 行列式はそれぞれ, $a$ 倍, $-1$ 倍, 1 倍されることになります.

**例 5.2.5.** 行列式の計算例をみてみましょう.

(1) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{1\text{ 行} \leftrightarrow 3\text{ 行}} -3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{3\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-1) \\ 4\text{ 行}+1\text{ 行}\times(-2)}]{2\text{ 行}+1\text{ 行}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{3\text{ 行}+1\text{ 行}\times 3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -2+22 = 20$$

**注意 5.2.6.** 行列式にはこの他にも多くの計算公式があります (例えば, 余因子展開を用いた方法, ヴァンデルモンドの行列式など)．それぞれ, 行列の形に応じて使い分けるとよいのですが, ここでは詳しい方法は説明しません (詳しいことは線形代数の本を見てください)．少なくとも, このプリントで説明した方法で, (計算が煩雑な場合もありますが) 必ず行列式を計算することはできるはずです.

章末問題：次の行列の行列式を求めてください.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ -5 & 0 & 3 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解答：(1) $-6$ (2) 0 (3) 0 (4) 30

## 5.3　補足：行列式の幾何学的な意味

ここでは，より深い行列式の理解のために，「**行列式の幾何学的な意味**」を紹介します．$A$ を $n$ 次正方行列式とします．ここで，$A$ を行ベクトル $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ $(i=1,\cdots,n)$ を用いて書き表すと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

となります．これらの $n$ 個の行ベクトル $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ は $n$ 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中で，次のように平行 $2n$ 面体 $\Delta(A)$ を定めます：

$$\Delta(A) := \{u_1\mathbf{a}_1 + \cdots + u_n\mathbf{a}_n \mid 0 \le u_i \le 1 \ \ (i=1,\ldots,n)\}.$$

このとき，この平行 $2n$ 面体 $\Delta(A)$ と行列式には次の関係があります．

**定理 5.3.1.** $\Delta(A)$ の体積 $= |\det A|$ が成り立つ．ここで，右辺は，「行列 $A$ の行列式の絶対値」を意味します．「行列式の記号」と「絶対値の記号」が混同しないように気を付けてください．

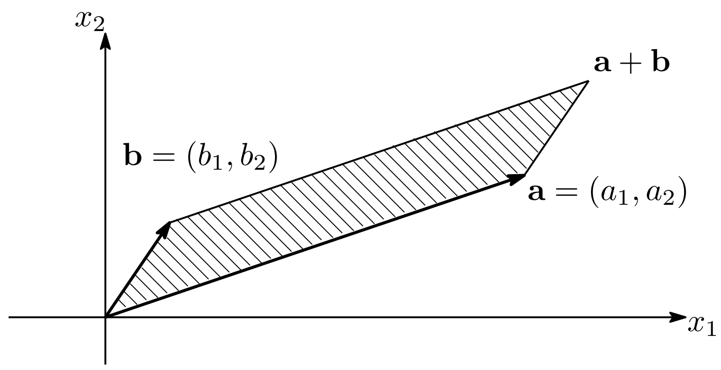
以下，このことを $n=2$ と $n=3$ の場合に具体的に調べてみましょう．

### 5.3.1　$n=2$ の場合

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ とおきます．このとき，

$$\Delta(A) = \{u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} \mid 0 \le u_i \le 1 \ (i=1,2)\}$$

なので，一般に，右図のような平行四辺形になります (但し，$\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ の定数倍であるとき，$\Delta(A)$ は平行四辺形でなく，線分になります)．




ここで，次の 3 つに場合分けして考えていきましょう：

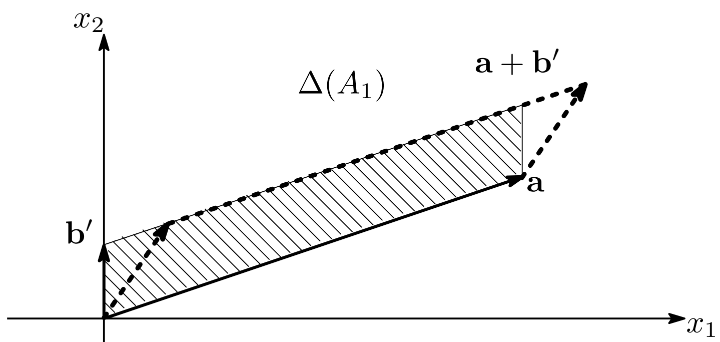
$$\textbf{(1)}\ \ a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \qquad \textbf{(2)}\ \ a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0,\ a_1 \ne 0 \qquad \textbf{(3)}\ \ a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0,\ a_1 = 0$$

**(1)　$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ の場合**：簡単の為，$a_1 \ne 0$ とします．このとき，$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \frac{a_2}{a_1}b_1 \end{bmatrix} = \frac{b_1}{a_1}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \frac{b_1}{a_1}\mathbf{a}$，すなわち，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ の定数倍になるので，$\Delta(A)$ は線分となり，その面積 (すなわち，2 次元のときの体積) は 0 になります．一方，$\det A = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ なので，$\Delta(A)$ の面積 $= 0 = |\det A|$ となることがわかります．

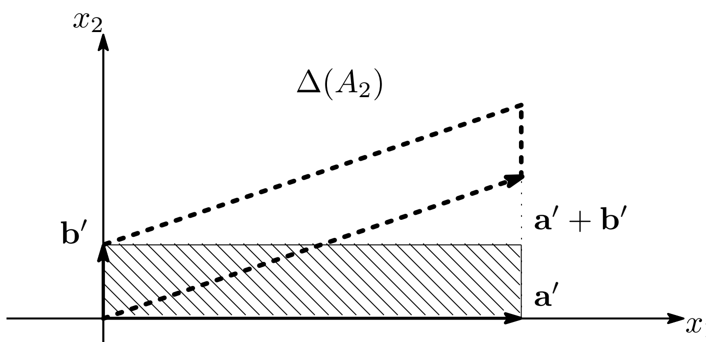
**(2)　$a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0,\ a_1 \ne 0$ の場合**：このとき，上の図の斜線部が $\Delta(A)$ です．まず，次の $A$ の基本変形を考えます．

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & \frac{1}{a_1}\det A \end{bmatrix} =: A_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1}\det A \end{bmatrix} =: A_2$$

ここで，$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_1}\det A \end{bmatrix}$，$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと，$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix}$，$A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix}$ となり，$\Delta(A_1)$ と $\Delta(A_2)$ は，次のような平行四辺形になります：




点線の平行四辺形は $\Delta(A)$




点線の平行四辺形は $\Delta(A_1)$

いずれの変形も一辺を固定し，その辺と平行な辺を平行移動しているだけなので，面積は変わりません．故に

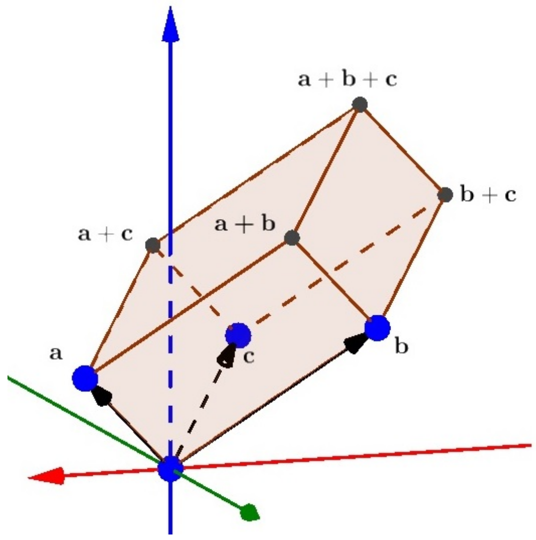
$$\Delta(A) \text{ の面積} = \Delta(A_1) \text{ の面積} = \Delta(A_2) \text{ の面積} = \left| a_1 \cdot \frac{1}{a_1}\det A \right| = |\det A|$$

となります．ここで，絶対値が出てくるのは，$a_1$ や $\det A$ が負の場合もあるからです (図は $a_1$, $\det A > 0$ の場合です)．

**(3)　$a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0,\ a_1 = 0$ の場合**：このとき，$-a_2b_1 \ne 0$ なので，自動的に $b_1 \ne 0$ となります．故に，(2) の説明において，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の役割を入れ替えれば，上と同様に確かめることが出来ます．

### 5.3.2　$n=3$ の場合

$n=2$ のときと同様に考えてみましょう．$A=\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\\\mathbf{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$ とします．簡単の為, $\det A\neq 0$ を仮定します ($\det A=0$ のとき, $\Delta(A)$ は平行四辺形か線分になりますので, 体積は 0 になります)．このとき, $\Delta(A)$ は右下の図のような平行六面体になります．



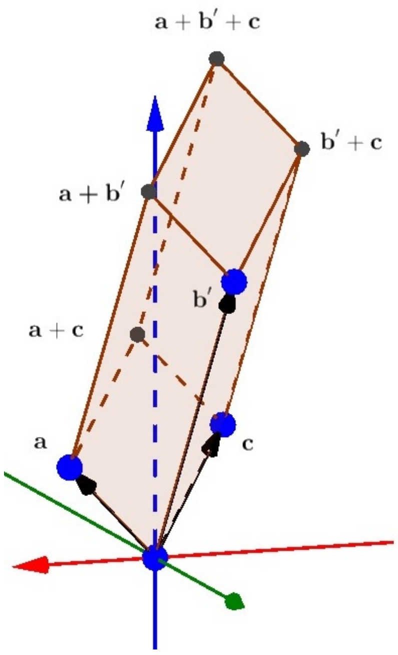

まず, $A$ を次のように簡約化してみましょう．

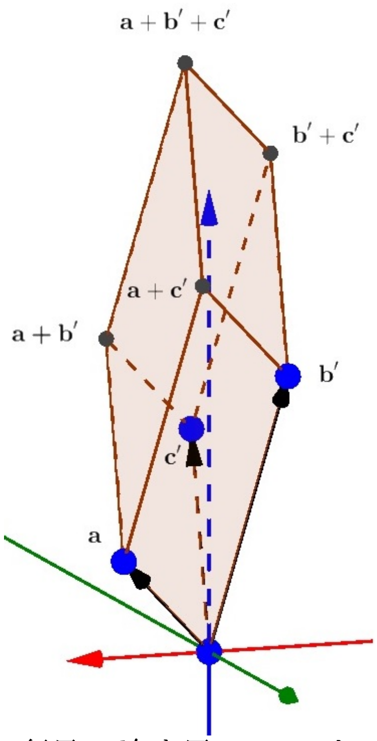
$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\0&b'_2&b'_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=:A_1=\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}'\\\mathbf{c}\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\0&b'_2&b'_3\\0&c'_2&c'_3\end{bmatrix}=:A_2=\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}'\\\mathbf{c}'\end{bmatrix}$$

但し, 簡単の為, $a_1\neq 0$ と仮定しています．ここで, 次が成り立ちます．

$$b'_i=b_i-\frac{b_1}{a_1}a_i,\quad c'_i=c_i-\frac{c_1}{a_1}a_i\quad (i=2,3)$$

このとき, $\Delta(A_1)$ と $\Delta(A_2)$ を図示すると, それぞれ下図のようになります：




図をよく見てみますと, $\Delta(A)$ から $\Delta(A_1)$ の変化では, ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ の張る平行四辺形は固定され, その面と平行な面が平行移動しているだけです．従って, 体積は変わりません：

$$\Delta(A)\text{ の体積}=\Delta(A_1)\text{ の体積}$$

同様に, $\Delta(A_1)$ から $\Delta(A_2)$ の変化では, ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}'$ の張る平行四辺形は固定され, その面と平行な面が平行移動しているだけですので,

$$\Delta(A_1)\text{ の体積}=\Delta(A_2)\text{ の体積}$$

となります．従って, 次が得られます：

$$\Delta(A)\text{ の体積}=\Delta(A_2)\text{ の体積}$$

次に, 上の基本変形と同様に, $A_2$ の 2 行目の $b'_2$ を用いて, $a_2$ と $c'_2$ を 0 にします (但し, 簡単の為, $b'_2\neq 0$ と仮定します)：

$$A_2\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&0&a'_3\\0&b'_2&b'_3\\0&c'_2&c'_3\end{bmatrix}=:A_3=\begin{bmatrix}\mathbf{a}'\\\mathbf{b}'\\\mathbf{c}'\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&0&a'_3\\0&b'_2&b'_3\\0&0&c''_3\end{bmatrix}=:A_4=\begin{bmatrix}\mathbf{a}'\\\mathbf{b}'\\\mathbf{c}''\end{bmatrix}$$

このとき, 次が成り立ちます：　$c''_3=c'_3-\dfrac{c'_2}{b'_2}\cdot b'_3=\dfrac{a_1b_2c_3-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1}{a_1\cdot\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\right)}=\dfrac{\det A}{a_1\cdot b'_2}$

上と同様に考えると, $\Delta(A_2)$ から $\Delta(A_3)$ の変化では, ベクトル $\mathbf{b}'$ と $\mathbf{c}'$ の張る平行四辺形が, $\Delta(A_3)$ から $\Delta(A_4)$ の変化では, ベクトル $\mathbf{a}'$ と $\mathbf{b}'$ の張る平行四辺形がそれぞれ固定されていて, いずれも, それらの面と平行な面が平行移動しているだけなので, 体積は変わりません．つまり,『$\Delta(A_2)$ の体積 $=\Delta(A_3)$ の体積 $=\Delta(A_4)$ の体積』が成り立ちます．

最後に, 再び, 上の基本変形と同様に, $A_4$ の 3 行目の $c''_3$ を用いて, $a'_3$ と $b'_3$ を 0 にします．

$$A_4\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&b'_2&b'_3\\0&0&c''_3\end{bmatrix}=:A_5=\begin{bmatrix}\mathbf{a}''\\\mathbf{b}'\\\mathbf{c}''\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&b'_2&0\\0&0&c''_3\end{bmatrix}=:A_6=\begin{bmatrix}\mathbf{a}''\\\mathbf{b}''\\\mathbf{c}''\end{bmatrix}$$

この場合も上と同様に, 体積は変わらないので,『$\Delta(A_4)$ の体積 $=\Delta(A_5)$ の体積 $=\Delta(A_6)$ の体積』が成り立ちます．さらに, $\Delta(A_6)$ は右図のような直方体になっています．特に, 体積が計算できます：

$$\Delta(A_6)\text{ の体積}=|a_1\cdot b'_2\cdot c''_3|=\left|a_1\cdot b'_2\cdot\frac{\det A}{a_1\cdot b'_2}\right|=|\det A|$$

ここで, 絶対値が出てくるのは, $a_1$ や $b'_2$ や $\det A$ が負の場合もあるからです (図はいずれも正の場合)．
以上より, $\Delta(A)$ の体積 $=|\det A|$ が確かめられました．