核心解説：線形代数学 I
vol. 4 逆行列の求め方

作成者：黒田 匡迪, 辻栄 周平 （監修：数学教室）

4.1 はじめに

「**vol. 1** 行列の基本変形のやり方」において, 以下の３つの問題

問題 1 連立一次方程式を解く問題　　**問題 2** 逆行列を求める問題　　**問題 3** 行列式を求める問題

は基本変形を繰り返し行うことで, 解くことが出来ると述べました.

この **vol. 4** では, 「**vol. 1** 行列の基本変形のやり方」と「**vol. 2** 基本変形の仕組み」を踏まえた

問題 2　逆行列を求める問題

の解法を紹介していきます.

4.2 「問題 2　逆行列を求める問題」の解法

与えられた正方行列 A の逆行列が

存在するか否かを判定する問題と,
存在するのならば, その逆行列を求める問題

の解法を紹介します. まずは『逆行列』の定義を確認しておきましょう.

定義 4.2.1 (正則行列と逆行列)**.** A を n 次正方行列とする.

$$AB = BA = E_n \quad (E_n \text{ は } n \text{ 次単位行列})$$

を満たす n 次正方行列 B が存在するとき, A は正則であるという. このとき, B を A の逆行列といい, A^{-1} と書き表す.

A を n 次正方行列とします. この A に対して, 上の２つの問題の解法を紹介します.

逆行列の存在判定と逆行列の求め方

$[A|E_n]$ の簡約化を $[M|B]$ とします. このとき,

$$A \text{ が正則である (つまり, } A \text{ の逆行列が存在する)} \iff M = E_n$$

であり, このとき, B が A の逆行列です. つまり $A^{-1} = B$ となります. 但し, この簡約化は行基本変形のみ, あるいは, 列基本変形のみで行わなければなりません.

注意 4.2.2. 上の逆行列の求め方にあるように, 「逆行列を求めること」は「簡約化を計算できるかどうか」にかかっています. これが, このプリントの最初に述べた「逆行列は基本変形を繰り返し行うことで求まる」ということの理由です.

具体的な計算を行う前に, 上の「求め方」でなぜ求まるのかを説明しておきます (この説明から, 簡約化は行基本変形のみ, あるいは, 列基本変形のみで行わなければならない, という理由もわかります).

$[A|E_n]$ の簡約化は $[M|B]$ なので, 特に, A の簡約化は M になります. すなわち, A に対して, 行基本変形 (或いは, 列基本変形) を繰り返し行うことで, M になります. このとき, 「**vol. 2** 基本変形の仕組み」より, ある基本行列 $X_1, \ldots, X_k$ を用いて

$$M = X_k \cdots X_1 A \quad (\text{或いは, } M = AX_1 \cdots X_k)$$

と書き表すことが出来ます (X_i は i 回目の基本変形を実現する基本行列です). 従って, $M = E_n$ であれば,

$$X_k \cdots X_1 A = E_n \quad (\text{或いは, } AX_1 \cdots X_k = E_n)$$

となります. よって, $X_k \cdots X_1$ (或いは, $X_1 \cdots X_k$) が A の逆行列になります. このように, 一方向からかけ続けないと A の逆行列は求まりません. つまり, 行基本変形 (X_i たち) と列基本変形 (Y_j たち) の両方を行って簡約化して

$$E_n = X_s \cdots X_1 A Y_1 \cdots Y_t$$

となっても A の逆行列は求まらないわけです. これが, 行基本変形のみ, あるいは, 列基本変形のみで行わなければならない, という理由です. 一方, $[A|E_n]$ の簡約化が $[M|B]$ ですので,

$$[M|B] = X_k \cdots X_1 [A|E_n] = [X_k \cdots X_1 A | X_k \cdots X_1 E_n] = [M | X_k \cdots X_1]$$
$$(\text{或いは, } [M|B] = [A|E_n] X_1 \cdots X_k = [AX_1 \cdots X_k | E_n X_1 \cdots X_k] = [M | X_1 \cdots X_k])$$

となり, 従って, $B = X_k \cdots X_1$ (或いは, $B = X_1 \cdots X_k$) となり, B が A の逆行列であることがわかります. このことから, A の右側に E_n を並べて簡約化を行った理由は, A の簡約化を実現する基本行列の情報を右側に蓄積していくためにあった, ということになります.

例 4.2.3. 逆行列の存在判定と求め方の具体例をみてみましょう.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, $[A|E_3]$ を簡約化してみます.

$$[A|E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] = [M|B]$$

$M \neq E_3$ なので, A は逆行列をもたないことが分かります. また, 逆行列の話とはあまり関係ありませんが, 上記の議論から $M = BA$ となっていることが分かります.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ に対して, $[A|E_3]$ を簡約化してみます.

$$[A|E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right] = [M|B]$$

$M = E_3$ となったため, A は逆行列をもちます. 上記の議論から, $BA = M = E_3$ なので $A^{-1} = B$ です.

章末問題：次の行列が正則かどうかどうかを判定し, 正則ならばその逆行列を求めてください.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解答：(1) 正則であり, 逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. (2) 正則でない. (3) 正則でない.

(4) 正則であり, 逆行列は $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$