核心解説：線形代数学 I
vol. 3 連立一次方程式の解法

作成者：黒田 匡迪, 辻栄 周平 （監修：数学教室）

3.1 はじめに

「**vol. 1 行列の基本変形のやり方**」において, 以下の 3 つの問題

問題 1 連立一次方程式を解く問題	**問題 2** 逆行列を求める問題	**問題 3** 行列式を求める問題

は基本変形を繰り返し行うことで, 解くことが出来ると述べました．この **vol. 3** では, 「**vol. 1 行列の基本変形のやり方**」を踏まえた

問題 1 連立一次方程式を解く問題

の解法を紹介していきます．

3.2 「問題 1 連立一次方程式を解く問題」の解法

m 個の方程式からなる n 変数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

の解法を紹介します．

連立 1 次方程式の解き方

Step 1： 連立 1 次方程式に対応する**拡大係数行列** $[A|\mathbf{b}]$ を決定する．ここで $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ であり,

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \text{ である．}$$

Step 2： $[A|\mathbf{b}]$ の簡約化 $[B|\mathbf{b}']$ を求める．

Step 3： $[B|\mathbf{b}']$ を拡大係数行列としてもつ連立 1 次方程式を解く．

注意 3.2.1. 「行基本変形の (1)」は 1 つの方程式の両辺に a を掛けることに対応します．「行基本変形の (2)」は 2 つの方程式の入れ替え,「行基本変形の (3)」は消去法の原理に対応します．よって，**拡大係数行列に行基本変形を施しても方程式の解は変わりません．**さらに，簡約行列を拡大係数行列として持つ連立 1 次方程式を解くのは**簡単**です (後で具体的な計算をいくつか紹介します)．従って，「**連立 1 次方程式を解けるかどうか**」は「**拡大係数行列の簡約化を計算できるかどうか**」にかかっています．これが, このプリントの最初に述べた「連立 1 次方程式は基本変形を繰り返し行うことで解ける」ということの理由です．また，連立 1 次方程式を解くときに「列基本変形はやってはいけない」ことも分かるでしょう．なぜなら列基本変形に対応する方程式の変形は元の方程式の解を保たないからです．

例 3.2.2. 「連立 1 次方程式の解き方」の **Step 3** には一定のやり方があります．具体例を通してそのやり方を紹介します．

(1) 解が存在しない場合) 拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ の簡約化 $[B|\mathbf{b}']$ が $[B|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ となったとしましょう．$[B|\mathbf{b}']$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式は，

$$\begin{cases} x_1 & & + & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \end{cases}$$

となります．第 3 式が成り立ち得ないので，この連立 1 次方程式は解をもたないということになります．

(2) 解が唯一つの場合) 拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ の簡約化 $[B|\mathbf{b}']$ が $[B|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ となったとしましょう．$[B|\mathbf{b}']$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式は，

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 2 \\ & & x_3 & = & 3 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

となります．よって，解は唯一存在して，$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ です．このように，拡大係数行列の簡約化 $[B|\mathbf{b}']$ が $\left[\begin{array}{c|c} E & \mathbf{c} \\ O & \mathbf{0} \end{array}\right]$ という形であれば，解が唯一存在することが分かります．

(3) 解が無数にある場合) 拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}]$ の簡約化 $[B|\mathbf{b}']$ が $[B|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ となったとしましょう．

$[B|\mathbf{b}']$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & & +2x_4 & & = & 1 \\ & & x_3 & +3x_4 & & = & 7 \\ & & & & x_5 & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

となります．まずは，主成分に対応する変数（つまり各方程式において最も左にある変数）について解きましょう．主成分に対応する変数の係数は 1 なので，移項するだけでこの操作は完了します．

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - 4x_2 - 2x_4 \\ x_3 & = & 7 - 3x_4 \\ x_5 & = & 4 \end{cases}$$

主成分に対応していない変数 x_2, x_4 に関してはこれ以上何も条件式がないので，何でもよいということになります．a, b を任意定数として，$x_2 = a, x_4 = b$ としましょう．このとき，解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 4a - 2b \\ a \\ 7 - 3b \\ b \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (a, b \text{ は任意定数})$$

となります．このように，拡大係数行列の簡約化さえきちんとできていれば，移項して任意定数を設定するだけで解を求めることができます．

章末問題：次の一次連立方程式の解を求めてください．

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 & = & -1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 & = & -2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_5 & = & 1 \end{cases}$

解答：(1) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c は任意定数) (3) 解なし