核心解説：線形代数学 I

vol. 2 基本変形の仕組み

作成者：黒田 匡迪, 辻栄 周平 （監修：数学教室）

2.1 はじめに

「**vol. 1 行列の基本変形のやり方**」では, 基本変形を用いた行列の簡約化のアルゴリズムを紹介しました．この **vol. 2** では,「行列の基本変形の仕組み」について詳しく解説していきます．この **vol. 2** の内容は, 次回配布予定の「**vol.3 連立一次方程式の解法** (問題 1)」では用いられませんが,「**vol. 4 逆行列の求め方** (問題 2)」,「**vol. 5 行列式の求め方** (問題 3)」では, 非常に重要になってきますので, しっかりと理解するようにしましょう．

2.2 基本変形の仕組み

前章では, 基本変形を「$\longrightarrow$」で書き表していました．この章では, この「$\longrightarrow$」が実は「**ある行列を掛けている**」ということを説明します．このことは, **問題** 1 を解く場合には利いてきませんが, **問題** 2 と**問題** 3 を考えるうえで非常に重要になってきます．

まず最初に,『**基本変形「$\longrightarrow$」を実現するために掛けている行列**』の定義を与えます．

定義 2.2.1 (**基本行列**)**.** 次の n 次正方行列 $P(i;a)\ \ (a \neq 0),\ Q(i,j)\ \ (i \neq j),\ R(i,j;a)\ \ (i \neq j)$ を基本行列という:

$$
\begin{aligned}
P(i;a) &:= n \text{ 次単位行列 } E_n \text{ の } i \text{ 行目を } a \text{ 倍した行列}\\
Q(i,j) &:= n \text{ 次単位行列 } E_n \text{ の } i \text{ 行目と } j \text{ 行目を入れ替えた行列}\\
R(i,j;a) &:= n \text{ 次単位行列 } E_n \text{ の } i \text{ 行目に } j \text{ 行目の } a \text{ 倍を加えた行列}
\end{aligned}
$$

例 2.2.2 ($n=3$ **の基本行列**)**.**

$$
P(2;3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ R(3,1;2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

次に, これら「3 つの基本行列」と「3 つの基本変形」の対応を見てみましょう．

定理 2.2.3 (**基本変形と基本行列の関係**)**.** 基本変形と基本行列には次の関係がある．

- $P(i;a)$ を左からかける $\rightsquigarrow$ i 行目を a 倍する (行**基本変形の (1)**).
- $Q(i,j)$ を左からかける $\rightsquigarrow$ i 行目と j 行目を入れ替える (行**基本変形の (2)**).
- $R(i,j;a)$ を左からかける $\rightsquigarrow$ $\underline{i\text{ 行目に } j \text{ 行目}}$ の a 倍を加える (行**基本変形の (3)**)

- $P(i;a)$ を右からかける $\rightsquigarrow$ i 列目を a 倍する (列**基本変形の (1)**).
- $Q(i,j)$ を右からかける $\rightsquigarrow$ i 列目と j 列目を入れ替える (列**基本変形の (2)**).
- $R(i,j;a)$ を右からかける $\rightsquigarrow$ $\underline{j\text{ 列目に } i \text{ 列目}}$ の a 倍を加える (列**基本変形の (3)**)

注意 2.2.4. 基本行列を「左」からかけると「行」基本変形が引き起こされ,「右」からかけると「列」基本変形が引き起こされます．これらの区別はしっかりと付くように覚えてください．また, 下線部の i と j が入れ替わっていることに注意してください．

では, 実際に前章での行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ の簡約化を「**基本行列の掛け算**」で表してみましょう. A の簡約化は,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (1\text{ 行目と }2\text{ 行目を入れ替えた})$$
$$\longrightarrow A_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2\text{ 行目に }1\text{ 行目の }(-2)\text{ 倍を加えた})$$
$$\longrightarrow A_3=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2\text{ 行目を }(-1)\text{ 倍した})$$
$$\longrightarrow A_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1\text{ 行目に }2\text{ 行目の }(-2)\text{ 倍を加えた})$$

でしたので, 各々の基本変形を見ていきますと

$$A \longrightarrow A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}=Q(1,2)A$$
$$A_1 \longrightarrow A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}=R(2,1;-2)A_1$$
$$A_2 \longrightarrow A_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}=P(2;-1)A_2$$
$$A_3 \longrightarrow A_4=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}=R(1,2;-2)A_3$$

となります. 従って,

$$A_4=R(1,2;-2)\cdot P(2;-1)\cdot R(2,1;-2)\cdot Q(1,2)\cdot A$$

が得られます. これは A から A_4 への簡約化を「**基本行列の掛け算**」で表した形になっています.

章末問題：次の基本変形を表す基本行列をそれぞれ具体的に書き, 簡約化を行列の積の形で書き表してください.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の基本変形 (i) ～ (iii) を順次, 行うと $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ になる.

(i) 2 行目に 1 行目の (-1) を加え, (ii) 2 行目を (-1) 倍し, (iii) 1 行目に 2 行目の (-2) 倍を加える.

(2) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の基本変形 (i) ～ (iii) を順次, 行うと $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ になる.

(i) 1 行目と 2 行目を入れ替え, (ii) 3 行目に 1 行目の (-1) 倍を加え, (iii) 3 行目に 2 行目の 2 倍を加える.

(3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の基本変形 (i) ～ (vi) を順次, 行うと $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ になる.

(i) 3 行目に 1 行目の 1 倍を加え, (ii) 4 行目に 1 行目の (-2) 倍を加え, (iii) 4 行目に 2 行目の (-1) 倍を加え, (iv) 1 行目に 4 行目の (-1) 倍を加え, (v) 2 行目に 4 行目の 2 倍を加え, (vi) 3 行目に 4 行目の (-4) 倍を加える.

解答：(1) (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり, $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot A$

(2) (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ であり, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot A$

(3) (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり,

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot A$$