核心解説：線形代数学 I

vol. 1　行列の基本変形のやり方

作成者：黒田 匡迪, 辻栄 周平 （監修：数学教室）

1.1　はじめに

線形代数学において, 『基本変形』と呼ばれる操作はとても重要です. 例えば, 以下の 3 つの問題は, 基本的には『基本変形を繰り返し行う』ことで解くことができます：

問題 1　連立一次方程式を解く問題　　**問題 2**　逆行列を求める問題　　**問題 3**　行列式を求める問題

この核心解説シリーズでは, 以下の内容を予定しています：

vol. 1　行列の基本変形のやり方
vol. 2　基本変形の仕組み
vol. 3　連立一次方程式の解法
vol. 4　逆行列の求め方
vol. 5　行列式の求め方

具体的な基本変形のやり方をマスターし, 上の 3 つの問題を解けるようになるのが目標です.

1.2　行列の基本変形のやり方

行列の基本変形は次で定義されます.

定義 1.2.1 (行列の基本変形). 行列の次の 3 つの変形を行基本変形という：

(1)　1 つの行を a $(\neq 0)$ 倍する.
(2)　2 つの行を入れ替える.
(3)　1 つの行に他の行の a 倍を加える.

これらの 3 つの変形において, 「行」を「列」に置き換えたものを列基本変形という.

注意 1.2.2. **問題** 1 では, 『行』基本変形のみを用います. **問題** 2 では, 『行』基本変形のみ, 或いは, 『列』基本変形のみを用います. **問題** 3 では, どちらの基本変形も用います.

ここで, 3 つの基本変形について, 具体的な変形を見てみましょう. 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ とします.

(1) の変形：　1 行目を a $(\neq 0)$ 倍すると　$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2a & 3a & 8a \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(2) の変形：　1 行目と 2 行目を入れ替えると　$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

(3) の変形：　2 行目に 1 行目の a 倍を加えると　$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1+2a & 2+3a & 5+8a \end{bmatrix}$

となります. 『列』基本変形についても同様です.

こういった基本変形を繰り返し行って, 行列を変形させていくわけですが, 何かしらの『目標 (ゴール)』が無ければ, どのような変形を行えばよいかがわかりません. そのため, 次に『目標 (ゴール)』となる行列を定義します. それが次の『簡約行列』です.

定義 1.2.3 (簡約行列)**.**

- 0 でない成分を含む行において, 左から数えて最初の 0 でない成分をその行の主成分という.
- 次の (I) ~ (IV) の条件を満たす行列を簡約行列という：
  - (I) 成分がすべて 0 の行は, 0 でない成分を含む行よりも下にある.
  - (II) 0 でない成分を含む行の主成分は 1 である.
  - (III) 各行の主成分は, 下の行ほど右にある.
  - (IV) 各行の主成分を含む列の主成分以外の成分は全て 0 である.

簡約行列は言葉で書くと複雑でわかりづらいと思いますが, 次の例を見るとその感覚がつかめると思います.

例 1.2.4 (簡約行列の例)**.** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

それでは, 与えられた行列を『**目標 (ゴール)**』である『**簡約行列**』に変形していくアルゴリズムを紹介します. 基本変形を繰り返して簡約行列にすることを簡約化といいます.

簡約化の手順

Step 1： 各行の主成分のうち, 一番左にあるものを含む行の一つを『**行基本変形の (2)**』で 1 行目にする.

Step 2： 1 行目の主成分を『**行基本変形の (1)**』で 1 にする.

Step 3： 1 行目の主成分を含む列のその主成分以外の成分を『**行基本変形の (3)**』で 0 にする.

Step 4： 2 行目以下, 3 行目以下で, **Step 1** ~ **Step 3** を繰り返す.

実際に, 先程の行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

を簡約化してみましょう. 1 行目の主成分は $(1,1)$ 成分の 2 であり, 2 行目の主成分は $(2,1)$ 成分の 1 ですので, **Step 1** を行う必要はありませんが, **Step 2** 以降の計算を簡単にするために, 1 行目と 2 行目を入れ変えます.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} =: A_1$$

A_1 の 1 行目の主成分は 1 ですから, **Step 2** を行う必要はありません. 次に, **Step 3** を行います. A_1 の $(1,1)$ 成分 1 の下の 2 を 0 にするために, 2 行目に 1 行目の (-2) 倍を加えます.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2+1\cdot(-2) & 3+2\cdot(-2) & 8+5\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} =: A_2$$

これで, 1 行目の操作は終わりです. 続いて, **Step 4**, すなわち, 2 行目の操作にうつります. 3 行目以下は存在しませんので, **Step 1** を行う必要はありません. 次に, **Step 2** を行います. 2 行目の主成分 -1 を 1 にしたいので, 2 行目に (-1) を掛けます.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0\cdot(-1) & -1\cdot(-1) & -2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =: A_3$$

次に, **Step 3** を行います. A_3 の $(2,2)$ 成分 1 の上の 2 を 0 にするために, 1 行目に 2 行目の (-2) 倍を加えます.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1+0\cdot(-2) & 2+1\cdot(-2) & 5+2\cdot(-2) \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =: A_4$$

以上の基本変形で得られた行列 A_4 は確かに簡約行列になっていることが確かめられます.

章末問題：次の行列を簡約化してください.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

解答：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$