共形擬サブリーマン基本階別リー環および pseudo H-type Lie algebra について

八ッ井智章

微分式系 (M, D) の幾何学に於いて, 微分式系 D 上にリーマン計量 τ があるとき (M, D, τ) はサブリーマン多様体と呼ばれる. これの一般化の一つの方向として, τ を擬リーマン計量 τ に替えることが考えられる. 一方で, D 上にリーマン計量 τ をその共形類 $[\tau]$ に置き換えることを考えると, $(M, D, [\tau])$ は, 共形サブリーマン多様体 (またはサブ共形多様体) と呼ばれる. これの一般化として, τ を擬リーマン計量 τ に替えると, $(M, D, [\tau])$ は, 共形擬サブリーマン多様体と呼ばれる. 以下では D が完全積分可能である場合を除外する. 共形擬サブリーマン多様体 $(M, D, [\tau])$ に於いて, D に正則性と bracket-generating という条件を仮定すると, M の各点 x に対して, 表象代数と呼ばれる 基本階別リー環 (FGLA) $\mathfrak{m}(x) = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p(x)$ が定義され, 対 $(\mathfrak{m}(x), [\tau_x])$ は共形擬サブリーマン基本階別リー環 (conformal pseudo-subriemannian FGLA (CPFGLA)) となる (深さ 2 以上の FGLA $\mathfrak{m} = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$ と $\mathfrak{g}_{-1}$ 上の非退化対称双一次形式 g に対して, 対 $(\mathfrak{m}, [g])$ を CPGLA と呼ぶ). CPFGLA の代数的延長 (Tanaka prolongation) を調べることが共形擬サブリーマン多様体の同値問題の考察の第一歩となる. CPFGLA $(\mathfrak{m}, [g])$ の延長 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は, 有限次元となる. さらに g が正値であり $\mathfrak{g}_1 \neq 0$ であるときには, $\mathfrak{g}$ は実階数 1 の実単純リー環となることが知られている. しかし, g の符号数を一般にすると $\mathfrak{g}_1 \neq 0$ かつ $\mathfrak{g}$ が半単純でない例が存在する. そこで, 延長が半単純である CPFGLA の分類を試みる. さらに CPFGLA と pseudo H-type Lie algebra との関連性について述べたいと思う.