フラクタル上のラプラシアンに対する解析学[*]

梶野　直孝（神戸大学理学研究科数学専攻）

「フラクタル」とは「長さが無限大の曲線」のような，従前にはむしろ病的な事例とみなされていた滑らかでない構造を有する図形全般に対し B. B. Mandelbrot が与えた総称であり，彼の著書 *“The Fractal Geometry of Nature”* (Freeman, 1982) でその自然界における重要性が指摘されて以来，フラクタルは自然科学の諸分野で普遍的に見出され理論・応用の両面から盛んに研究されている[1].

数学解析・確率論の分野では，フラクタルにおいて熱や波動といった代表的な物理現象を厳密に記述し解析することを目標として，フラクタル上のラプラシアンや対応する拡散過程の構成と解析が 1980 年代後半以来進められてきた．フラクタルにおいては通常の偏微分の概念が意味をなさないため,「自然な『ラプラシアン』をどのようにして定義するべきか」（また「何を以て『自然』とするべきか」）は極めて非自明な問題となる．これに答えるには個々のフラクタルの幾何学的特性に対する慎重な考察が必要になり，過去 3 年間ほどの講演者の研究により幾分の進展は見られたものの，現在でもごく限られた範疇のフラクタルに対してしか満足できる解答は得られていない．

本講演の前半では，1980 年代後半以来よく研究されてきた古典的な場合である[2]

(1) 有限分岐的 Euclid 自己相似的フラクタル（代表例として Sierpiński gasket（図 1））

(2) 無限分岐的 Euclid 自己相似的フラクタル（代表例として Sierpiński carpet（図 2））

に対する研究の現状をかいつまんで解説する．この場合にはフラクタルの自己相似性と対称性に関して不変なラプラシアンが唯 1 つ存在することが（広範なフラクタルに対して）知られており，さらにその固有値・固有関数や対応する熱核が Euclid 領域や Riemann 多様体の場合とは全く異なる特異な挙動を示すことが分かってきているが，その一方で基本的な問題の多くが（特に **(2)** の場合に）未解決のまま残されている．

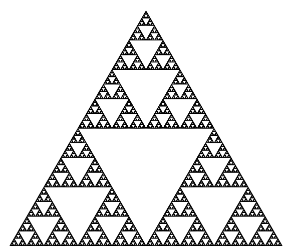

図 1: Sierpiński gasket

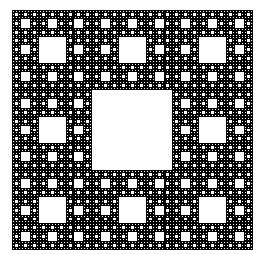

図 2: Sierpiński carpet

続いて本講演の後半では，講演者が 2015 年から取り組んでいる研究で得られた，Klein 群（Riemann 球面上の 1 次分数変換のなす離散群）の作用で不変な円詰込フラクタル（の幾つかの具体例）において **「幾何的に自然なラプラシアンが構成でき Weyl 型固有値漸近挙動が成り立つ」** という結果を紹介する．ここでラプラシアンの「自然さ」は「各座標関数（各座標軸への射影）が調和関数になる」という形で定式化される．講演者はまず Apollonian gasket（図 3）に対してそのようなラプラシアンの一意存在と具体的表示を得，さらに他の円詰込フラクタルに対しても，同様の表示式が意味をなすことからこれを定義として採用することで幾何的に自然なラプラシアン（の候補）を定めることに成功した．また Weyl 型固有値漸近挙動にはフラクタルの Hausdorff 次元・測度が自然に現れ，我々のラプラシアンはこの点でも「幾何的に自然」といえる．

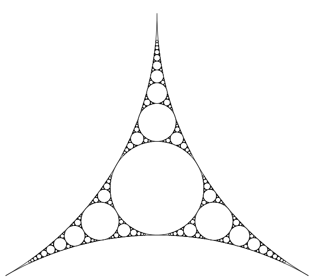

図 3: Apollonian gasket

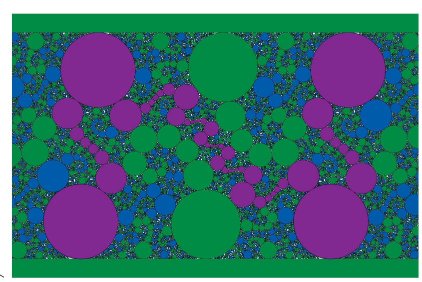

図 4: $\frac{7}{43}$ 両側 cusp 群の極限集合

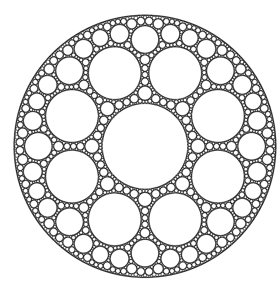

図 5: 円 Sierpiński carpet

[*]本研究は JSPS 科研費 25887038, 15K17554, 18K18720 の助成を受けたものである．

[1]興味のある方には，数学セミナー 2017 年 3 月号（日本評論社）の特集「フラクタルの今」を読まれることをお勧めする．

[2]「細胞同士が有限集合でしか交わらないような自然な細胞分割の列を有する」ようなフラクタルを**有限分岐的**，そうでないものを**無限分岐的**と称する．正確な定義は割愛するが，意味するところは図 1 と図 2 から概ねご了解いただけると思う．