筆 記 試 験 問 題

令和２年度 北海道大学 大学院理学院 博士後期課程 入学者選抜試験（１次）

数 学 専 攻

試験時間　１０：００〜１２：３０　（１５０分）

受 験 上 の 注 意 A

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけない.
2. 問題紙は，表紙も含めて 3 ページある.
3. 解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 4 枚ある.
4. 受験番号および座席番号を，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に記入すること.
5. 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入すること．必要があれば，解答用紙の裏面を使用してもよい.
6. 問題紙の余白は，下書きに使用してもよい.
7. 解答用紙は 4 枚とも提出すること.
8. 問題紙および下書き用紙は回収しない.

受 験 上 の 注 意 B

1. 答案には，論理的推論や式変形など，考察の過程を詳しく記述すること.
2. 問題文中の $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す.

問題 1

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 広義積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ を示せ.

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ とおくとき，広義三重積分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-f(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1dx_2dx_3$$

の値を求めよ.

問題 2

X をコンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とする．位相空間におけるコンパクト性とハウスドルフ性の定義に基づき，以下の問に答えよ.

(1) X の閉集合はコンパクトであることを示せ.

(2) Y のコンパクト集合は閉集合であることを示せ.

(3) $f: X \to Y$ を連続写像とする．A が X の閉集合ならば，像 $f(A)$ は Y の閉集合であることを示せ.

問題 3

n を正の整数とし，区間 $[0, \infty)$ 上の実数値関数 $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ を考える．

(1) a を正の実数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^a f_n(x)\,dx$ および広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ の値を求めよ．

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は区間 $[0, \infty)$ 上で一様収束することを示せ．

(3) 問 (2) の一様収束極限を $f(x)$ と表す．広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が発散することを示せ．

問題 4

n を 2 以上の整数とし，V を n 次複素正方行列全体のなす複素線形空間とする．行列 $A \in V$ と n 次複素正則行列 P に対して，

$$T_A(X) = AX + XA, \qquad C_P(X) = PXP^{-1} \qquad (X \in V)$$

と定める．

(1) V の線形変換 T_A と C_P は等式

$$C_P \circ T_A = T_{C_P(A)} \circ C_P$$

を満たすことを示せ．ただし，$\circ$ は線形変換の合成を表す．

(2) 行列 A は $A^2 = A$ を満たし，A の階数 r は $1 \leq r \leq n-1$ を満たすとする．このとき，A の固有値は 0 と 1 からなること，および A は対角化可能であることを示せ．

(3) 問 (2) の行列 A に対して，V の線形変換 T_A の固有値をすべて求め，各固有空間の次元を n と r を用いて表せ．